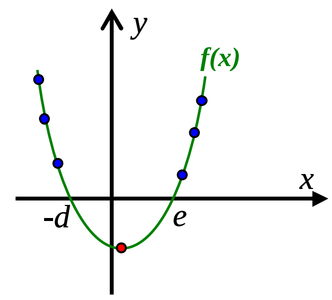
MENCARI NILAI MAKSIMUM atau MINIMUM
PERSAMAAN KUADRAT
DENGAN METODE GRADIEN

Mengapa mencari nilai maksimum dan minimum pers. kuadrat dengan metode kemiringan = gradien = dy/dx = m = 0 ?

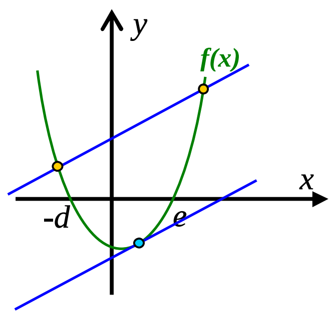
Perhatikan kurva persamaan kuadrat berikut ini:



Bila diberikan sebuah titik (x, y) sembarang dan coba diterapkan di sepanjang kurva, maka akan ditemukan titik sebanyak tak berhingga yang cuma satu diantaranya itu yang menjadi titik puncaknya .

Dengan demikian, mencari nilai maksimum atau minimum dengan bermodalkan titik amatlah suuu…..lit.

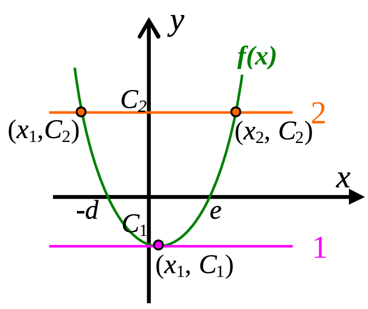
Perhatikan kembali kurva berikut ini:



Bila diberikan sebuah garis (LINTASAN TERPENDEK 2 TITIK) yang kebetulan cukup miring, maka bila kita geser – geser akan kita dapatkan 2 titik di sepanjang kurva dan akhirnya terakhir 1 titik saja. Sayangnya titik terkhir ini secara grafik bukanlah titik maksimum ataupun minimum kurva.

Jangan menyerah….!!

Kembali coba lihat kurva ini lagi:

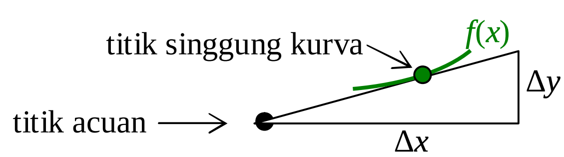


Nah, sekarang bila garisnya dibuat mendatar sejajar dengan sb. x dan kita geser – geser akhirnya akan kita dapatkan satu titik istemewa, yakni nilai maksimum atau minimum kurva.

Grafik di samping nilai titiknya minimum (di titik terendah kurva).

Jadi, kemiringan garis = 0 dapat menunjukkan nilai maksimum atau minimum kurva.

Miring 90^o = tegak (vertikal), ingat film *Vertical Limit*??
Miring 0^o = mendatar (horisontal), ngga ada film-nya.
Miring C^o = berarti membandingkan tinggi (Δy) sesuatu terhadap proyeksinya (Δx) dari suatu titik acuan. Lihat segitiga berikut



Lantas apa bedanya garis 1 dan 2 ? Bukankah sama – sama mendatar dy/dx = m = 0 ? Mengapa garis 2 mendapatkan 2 titik di kurva sedangkan garis 1 **hanya** 1 titik dan itulah titik maksimum atau minimumnya? Apa beda $\Delta y/\Delta x$ dengan dy/dx dalam mencari gradien?

Gradien dari $\Delta y/\Delta x$ berasal dari sudut pandang parsial kurva, sedangkan dy/dx memandang keseluruhan kurva terhadap titik – titik uji sepanjang kurva. Meski demikian, keduanya sama secara sederhana.

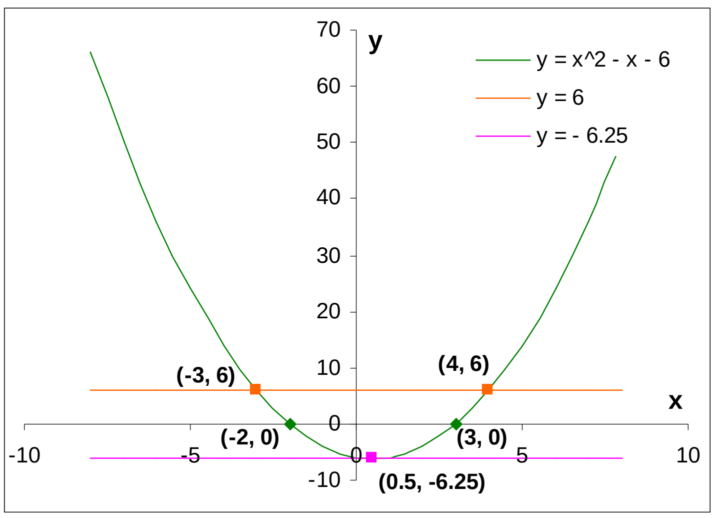
Garis 2 dapat terjadi sebanyak tak berhingga di sepanjang kurva. Misal pers. garis 2 $y_2 = mx + C_2$. karena m = 0, maka $y_2 = C_2$. Bila kurva $f(x) = ax^2 + bx + c$ terpotong garis 2, maka $f(x) = y_2$, dan kita akan peroleh 2 titik , yakni (x_1,C) dan (x_2,C).

Contoh: Garis $y = 6$ memotong kurva $y = x^2 - x - 6$ akan berpotongan di titik

$$
\begin{aligned}
y_{\text{kurva kuadrat}} &= y_{\text{garis}} \\
x^2 - x - 6 &= 6 \\
x^2 - x - 12 &= 0 \\
(x + 3)(x - 4) &= 0 \\
x + 3 = 0 \quad &\text{dan} \quad x - 4 = 0 \\
x_1 = -3 \quad &\text{dan} \quad x = 4
\end{aligned}
$$

Jadi, titik potongnya (–3,6) dan (4,6). Dengan bantuan pemrograman *worksheet* atau pemrograman matematika lainnya kita dapatkan grafiknya, yakni

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	**-2**	-1	0	**0.5**	1	2	**3**	4	5	6	7	8
y	66	50	36	24	14	6	**0**	-4	-6	**-6.25**	-6	-4	**0**	6	14	24	36	50



Bagaimana dengan garis gradiennya? Nah, garis 1 merupakan garis gradien yang diperoleh dari KURVAnya dan bukan persamaan garis karena tidak menghubungkan 2 titik. Sehingga titik maksimum atau minimumnya terjadi di satu titik saja (x, C_2). Dengan metode gradien $dy/dx = 0$, maka kurva $y = x^2 - x - 6$ memiliki

$$
\begin{aligned}
dy/dx &= d\,(x^2 - x - 6)\,/dx \\
0 &= 2x - 1 \\
x &= ½
\end{aligned}
$$

dan pada $x = ½$ ini memberikan nilai $y = -6{,}25$ yang merupakan nilai minimum kurva.

Nilai maksimum atau minimum pers. kuadrat pada metode kuadrat sempurna sebelumnya dapat dicari dengan persamaan $y_e = -D/4a$. Bagaimana kaitannya dengan metode gradien?

Bila $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka

$$
\begin{aligned}
dy/dx &= d(ax^2 + bx + c)/dx \\
\text{maks. / min.} \qquad 0 &= 2ax + b \\
x &= -b/2a \quad \rightarrow \text{ titik } x_e \text{ (nilai } x \text{ puncak} = x \text{ ekstrim)}
\end{aligned}
$$

dan bila disubstitusikan nilai x_e ini ke $f(x) = ax^2 + bx + c$ akan didapatkan $y_e = -D/4a$. Jadi, semuanya terkait dan saling memperjelas.

Terakhir bagaimana mengetahui $dy/dx = 0$ dari suatu pers. kuadrat akan maks. atau min? Ah, mudah itu cek saja bila konstanta a (+) kurvanya akan $\cup$ berarti nilai $dy/dx = 0$ akan memberikan nilai minimum dan sebaliknya, oke…

Catatan:

1. *Berkas ini gratis untuk tujuan non komersial*
2. *Berkas ini termotivasi atas pengalaman saat pengajaran persiapan UN Karisma MNF - Jan 09*
3. *Berkas ini untuk "pendidikan yang terjangkau" bagi seluruh anak bangsa Indonesia*